

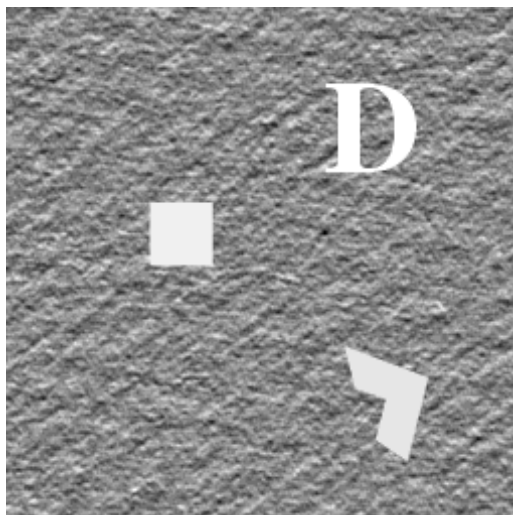
14. Detektion

14. Detektion

Ziel: Detektion von Objekten oder Defekten und Feststellung ihrer Lage

- Einfaches Modell: Objekte $o_i(\mathbf{x})$ sind einem Hintergrund $h(\mathbf{x})$ überlagert

$$g(\mathbf{x}) = \sum_i c_i \cdot o_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + h(\mathbf{x})$$



- Lineares Detektionsfilter (Impulsantwort $v(\mathbf{x})$):

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})$$

$k(\mathbf{x})$ soll an den Orten $\mathbf{x}_i$ Extremwerte zeigen

- Wichtige Fälle:

	Objekte $o_i(\mathbf{x})$ bekannt	Objekte (Defekte) unbekannt
Hintergrund $r(\mathbf{x})$ • schwach stationär (stochastischer Prozess) • AKF $r_{rr}(\tau)$ bekannt	Matched-Filter: Detektionsfilter mit optimalem SNR	Suche nach signifikanten lokalen Abweichungen von den Hintergrund-eigenschaften → z. B. Prädiktionsfehlerfilter
Hintergrund unbekannt	z. B. • Korrelationsfilter • <i>Phase Only Filter</i> (POF) • Inverses Filter	Detektion lokaler Texturinhomogenitäten → Homogenitätstests

14.1.1 Unbekannter Hintergrund

- Objekt $o(\mathbf{x})$ bekannt (deterministisches Signal), Hintergrund unbekannt:

$$g(\mathbf{x}) = c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x}) ** c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x})$$



$$G(\mathbf{f}) = O(\mathbf{f}) c e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{x}_0} + H(\mathbf{f})$$

- Idee: KKF von $o(\mathbf{x})$ und $o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$: $\iint o(\mathbf{x}) o(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$ wird maximal bei $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_0 \rightarrow g(\mathbf{x}) ** o(-\mathbf{x})$: Maximum bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

→ **Korrelationsfilter**

$$v(\mathbf{x}) = o(-\mathbf{x}) \quad \longleftrightarrow \quad V(\mathbf{f}) = O^*(\mathbf{f})$$

- Verallgemeinerung:

$$O(\mathbf{f}) = |O(\mathbf{f})| \cdot e^{j\angle O(\mathbf{f})}$$

$$V_q(\mathbf{f}) := |O(\mathbf{f})|^q \cdot e^{-j\angle O(\mathbf{f})} \quad q \in [-1, 1]$$

Verallgemeinerung heißt **Fractional Power Filter** (FPF)

Spezialfälle:

$$q = -1 : V(\mathbf{f}) = O^{-1}(\mathbf{f})$$

Inverses Filter zur Rekonstruktion von $c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rightarrow$ sehr schmaler Detektionspeak
Nullstellen von $O(\mathbf{f})$
 $\rightarrow$ extreme Rauschverstärkung

besser:
$$V(\mathbf{f}) = \frac{O^*(\mathbf{f})}{|O(\mathbf{f})|^2 + \varepsilon}$$

$$q = 0 : V(\mathbf{f}) = e^{-j\angle O(\mathbf{f})}$$

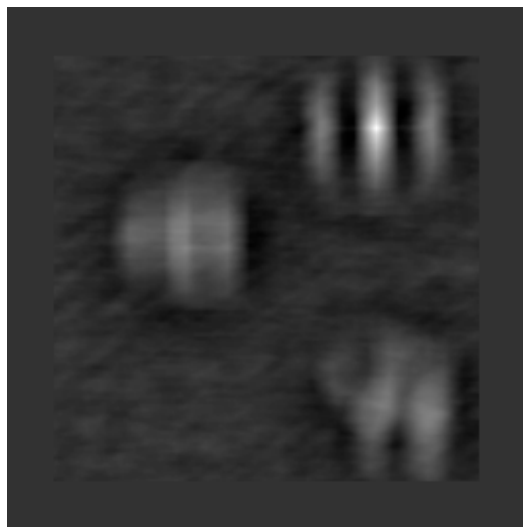
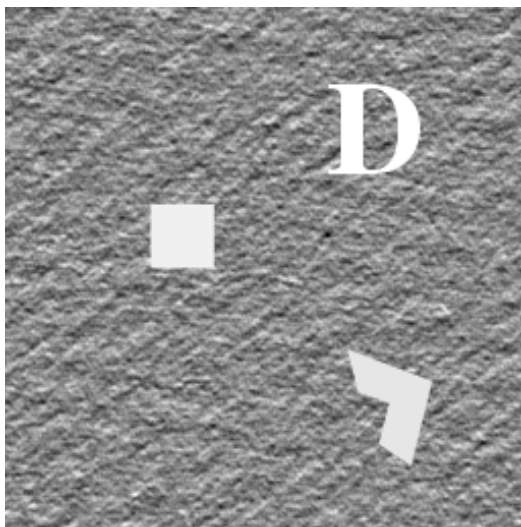
POF (Phase Only Filter): interessant für optische Realisierung, da kein Lichtverlust

$$q = 1 : \text{Korrelationsfilter}$$

Optimalfilter (Matched-Filter), falls $h(\mathbf{x}) = \text{weißes Rauschen}$

14.1.1 Unbekannter Hintergrund

Beispiel 14.1: Objektdetektion mittels Korrelationsfilter



Eingangsbild $g(\mathbf{x})$

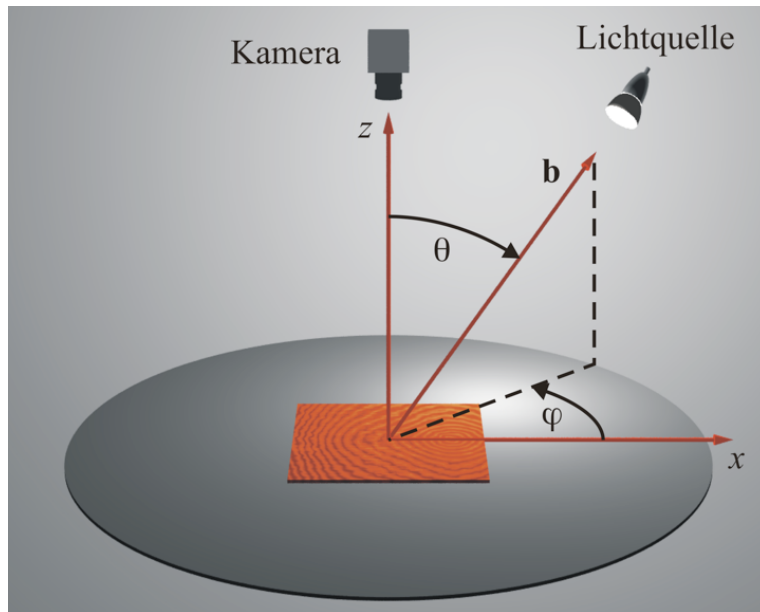
Impulsantwort
 $v(\mathbf{x}) = o(-\mathbf{x})$

Korrelationsergebnis $k(\mathbf{n})$

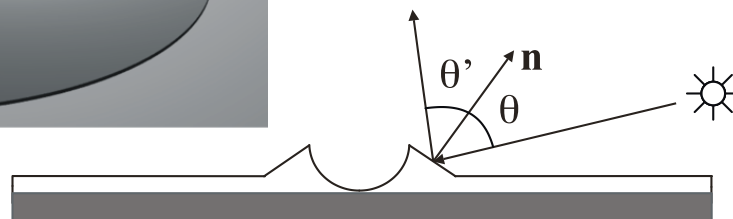
- Korrelationsansätze sind empfindlich gegen Rotation, Skalierung und Verzerrung der gesuchten, bekannten Objekte

Beispiel: Korrelationsfilter für Bildserien

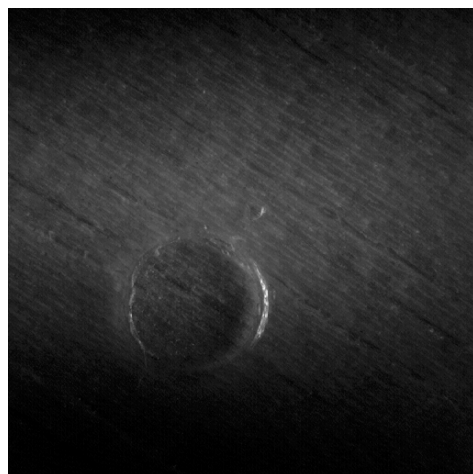
Kraterdetektion auf Holzoberflächen



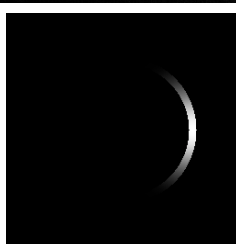
Kamera



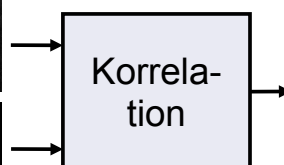
14.1.1 Unbekannter Hintergrund



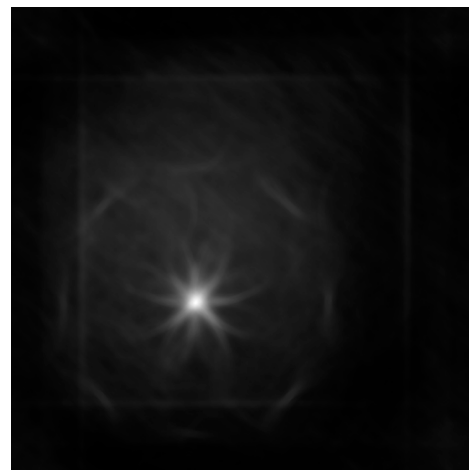
Eingangs-
bildserie
 $g(\mathbf{x}, \varphi)$

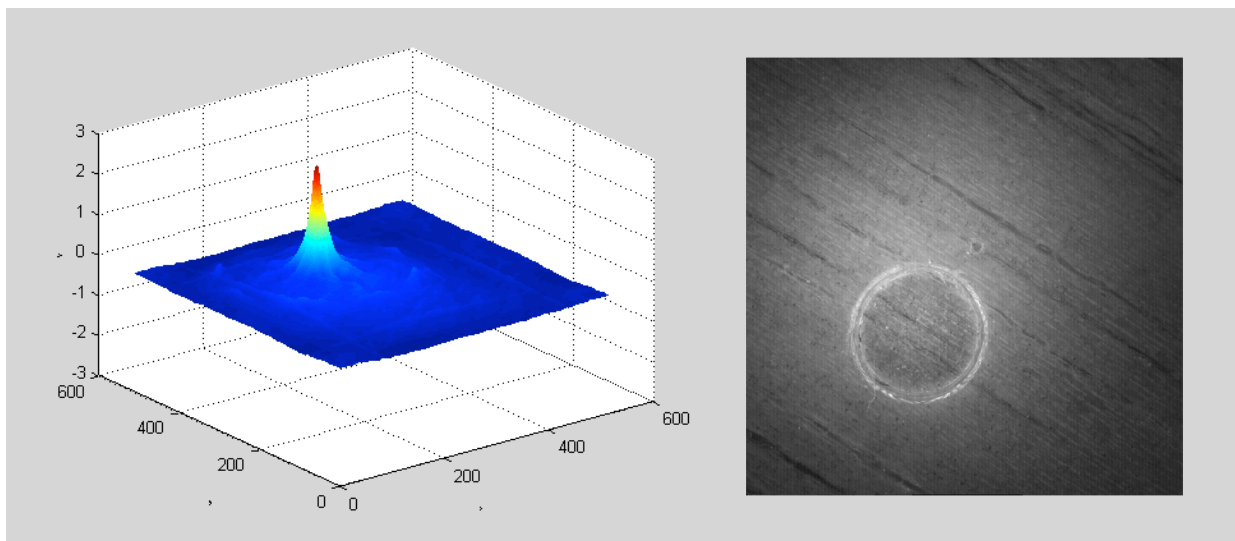


$v_R(-\mathbf{x}, \varphi) = o_R(\mathbf{x}, \varphi)$



Korrelationsergebnis $k_R(\mathbf{x})$





Ergebnis der Korrelationsfilterung

Detektionsergebnisse

14.1.2 Weißes Rauschen als Hintergrund

- Annahme: Hintergrund $h(\mathbf{x}) =$ weißes Rauschen, $S_{hh}(\mathbf{f}) \equiv N_h$

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x}) = \underbrace{c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** v(\mathbf{x})}_{\text{Nutzsignal}} + \underbrace{h(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})}_{\text{Störsignal}}$$

$$\text{SNR} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Störsignalleistung}}$$

- Nutzsignal:

$$P_1 := |c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** v(\mathbf{x})|^2 \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = c^2 |o(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})|^2 \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

$$= c^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} O(\mathbf{f}) V(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \right|^2$$

lokale Nutzsignal-
leistung am Ort $\mathbf{x}_0$

- Störsignal:

$$P_2 = N_h \iint_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}$$

mittlere
Störsignalleistung

14.1.2 Weißes Rauschen als Hintergrund

- **Ziel:** SNR am Ort $\mathbf{x}_0$ maximieren

- Es gilt:

$$\left| \iint_{-\infty}^{\infty} O(\mathbf{f}) V(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \right|^2 \leq \iint_{-\infty}^{\infty} |O(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}$$

Schwarz'sche Ungleichung

- Linke Seite maximal (d. h. Ungleichung $\rightarrow$ Gleichung), falls $V(\mathbf{f}) \propto O^*(\mathbf{f})$

- Bei festem P_2 wird SNR maximal für

$$V(\mathbf{f}) = \text{const.} \cdot O^*(\mathbf{f})$$

$$\Downarrow$$

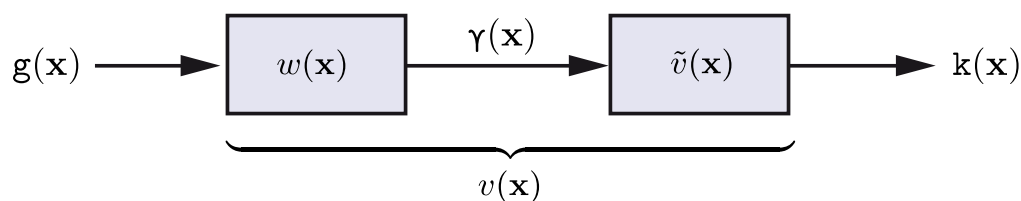
$$v(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot o(-\mathbf{x}) \rightarrow \text{Korrelationsfilter}$$

„Matched-Filter“

Optimalfilter im Sinne maximalen SNRs an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

14.1.3 Korreliertes Rauschen als Hintergrund

- **Verallgemeinerung:** $h(\mathbf{x})$ = korreliertes, schwach stationäres Rauschen



$$\gamma(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x}) = c \underbrace{o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** w(\mathbf{x})}_{=: \tilde{o}(\mathbf{x})} + \underbrace{h(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})}_{=: \rho(\mathbf{x})}$$

- **Ansatz:** $\rho(\mathbf{x})$ soll weißes Rauschen sein

$$S_{\rho\rho}(\mathbf{f}) = |W(\mathbf{f})|^2 S_{hh}(\mathbf{f}) \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$$\Rightarrow |W(\mathbf{f})| = \frac{1}{\sqrt{S_{hh}(\mathbf{f})}}$$

„Whitening“-Filter

$\rightarrow$ Problem auf den Fall weißes Rauschens zurückgeführt

14.1.3 Korreliertes Rauschen als Hintergrund

- Durch das *Whitening* entsteht das modifizierte Nutzsignal $\tilde{o}(\mathbf{x})$ mit überlagertem weißem Rauschen, das nun mit einem Matched-Filter detektiert werden kann:

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot \tilde{o}(-\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{o}(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})$$

- Somit resultiert für das Detektionsfilter insgesamt:

$$v(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot \tilde{o}(-\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot o(-\mathbf{x}) ** w(-\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})$$



$$V(\mathbf{f}) = \text{const.} \cdot O^*(\mathbf{f}) |W(\mathbf{f})|^2 = \text{const.} \cdot \frac{O^*(\mathbf{f})}{S_{hh}(\mathbf{f})}$$

Filter öffnet für spektrale Komponenten von $o(\mathbf{x})$ und schließt für starke spektrale Komponenten von $h(\mathbf{x})$

„Matched-Filter für farbiges Rauschen“

14.1.4 Diskret formuliertes Matched-Filter

Beispiel 14.2: Zeichenerkennung



(a)



„0“



„1“



„2“



(b)

(c)



(d)

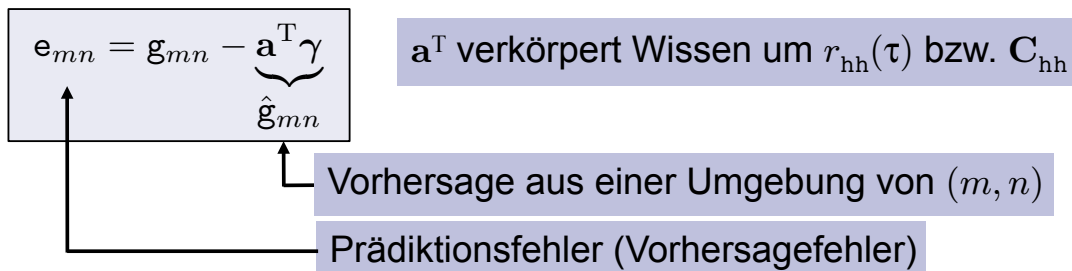
14.2 Detektion unbekannter Objekte (Defekte)

- $o(x)$: stochastischer Prozess, Eigenschaften unbekannt
- $h(x)$: schwach stationärer stochastischer Prozess; AKF $r_{hh}(\tau)$ bekannt
- Typische Situation für Defektdetektion in bekannten Texturen

Vorgehensweise:

- Suche nach signifikanten lokalen Abweichungen von den statistischen Eigenschaften von $g(x)$ durch selektive Unterdrückung von $h(x)$
→ Hervorhebung der Defekte

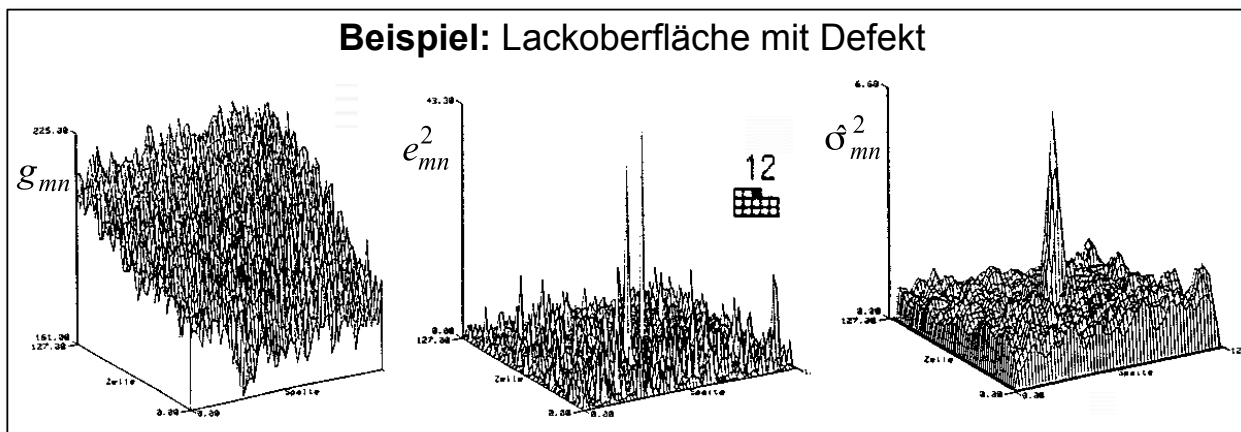
Beispiel 14.3: Prädiktionsfehlerfilter auf Basis eines AR-Modells



14.2 Detektion unbekannter Objekte (Defekte)

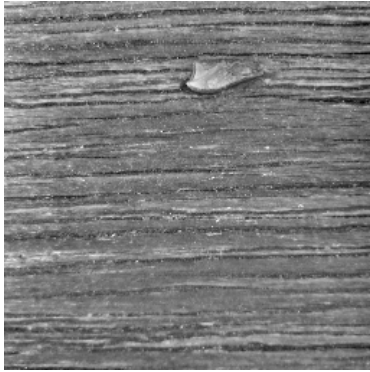
- An lokalen Abweichungen des Bildsignals g_{mn} vom modellierten Hintergrund h_{mn} hat der Prädiktionsfehler e_{mn} eine hohe lokale Leistung
→ $\sigma_{mn}^2 = \text{Var}\{e_{mn}\}$ hat lokale Maxima bei Defekten
- Schätzung durch Tiefpassfilterung des Prädiktionsfehlerquadrats

Beispiel: Lackoberfläche mit Defekt

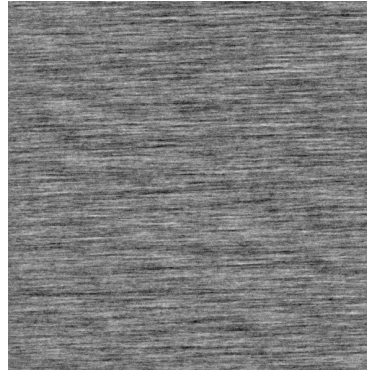


Beispiel 14.3: Prädiktionsfehlerfilter, Fehlerdetektion in einer Holztextur

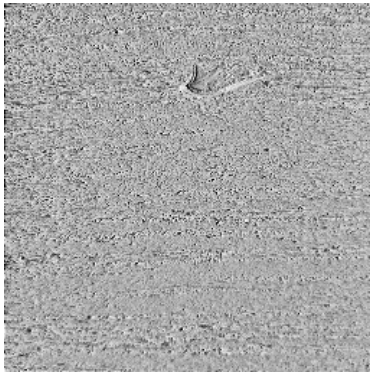
Original-
aufnahme
 g_{mn}



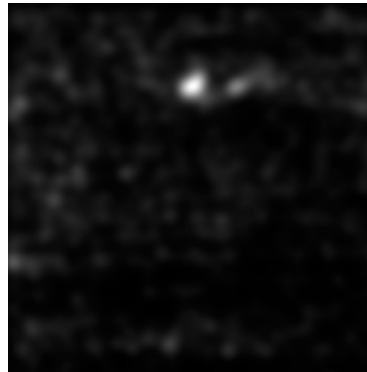
Prädiktion
 $\hat{g}_{mn}$



Prädiktions-
fehler
 e_{mn}



Schätzung
der lokalen
Varianz
von e_{mn}
($\text{TP}\{e_{mn}^2\}$)



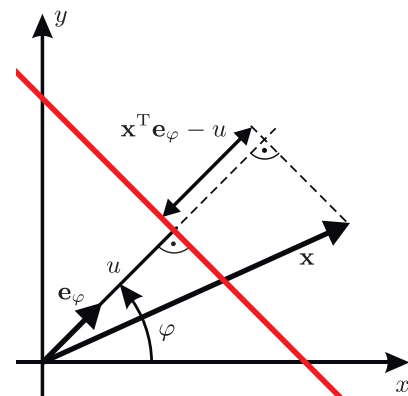
14.3 Geradendetektion

- Geraden sind wichtige Bestandteile zahlreicher Bilder
- Ziel:** Detektion und Lagebestimmung

14.3.1 Die Radon-Transformation

Definition:

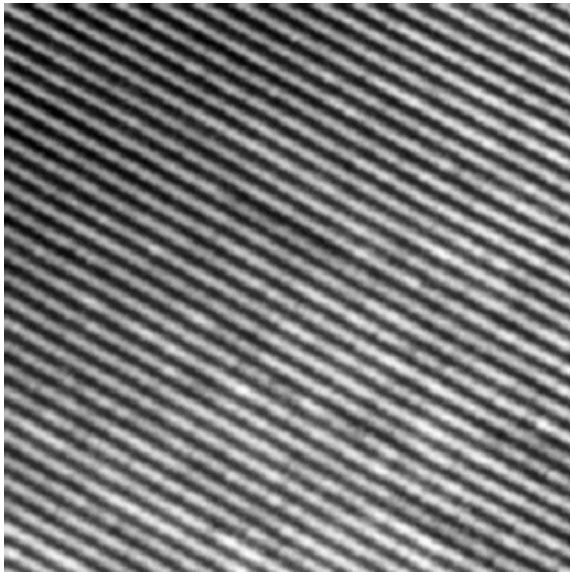
$$\check{g}(u, \varphi) = \mathcal{R}\{g(\mathbf{x})\} := \iint_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \underbrace{\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_{\varphi} - u)}_{\delta\text{-Gerade}} d\mathbf{x}$$



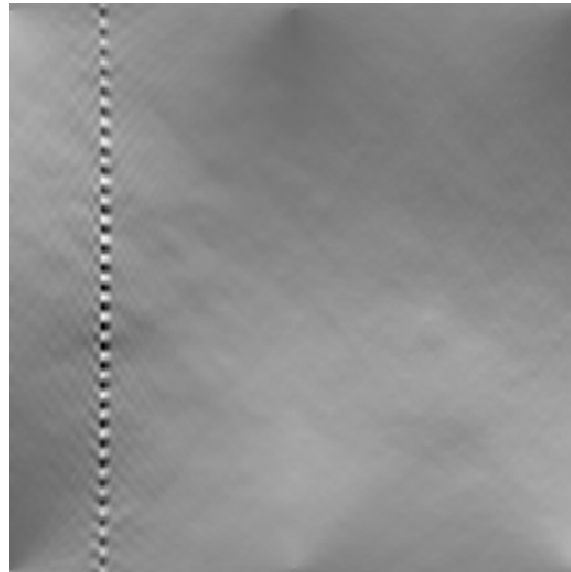
u : Ursprungsabstand
 $\mathbf{e}_{\varphi}$: Normalenvektor

- Die Radon-Transformation entwickelt $g(\mathbf{x})$ nach δ -Geraden
- Für $\varphi = \varphi_0$ fest, u variabel ist $\check{g}$ Parallelprojektion von $g(\mathbf{x})$ senkrecht zu $\mathbf{e}_{\varphi}$
- Enthält $g(\mathbf{x})$ eine δ -Gerade $\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_{\alpha} - d)$, so zeigt $\check{g}(u, \varphi)$ ein ausgeprägtes Maximum bei $\varphi = \alpha, u = d$

Beispiel 14.4: Radon-Transformation einer Riefentextur



Stoßtextur



Radon-Transformierte

14.3.1 Die Radon-Transformation

Das Zentralschnitt-Theorem

■ $\varphi = 0^\circ \Rightarrow u = x :$

$$\begin{aligned}\check{g}(x, 0) &= \int g(\mathbf{x}) \, dy = \iint g(\mathbf{x}) \, \delta(x - u) \, d\mathbf{x} \\ &= g(\mathbf{x}) ** \delta(x) = g(\mathbf{x}) ** \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_x)\end{aligned}$$



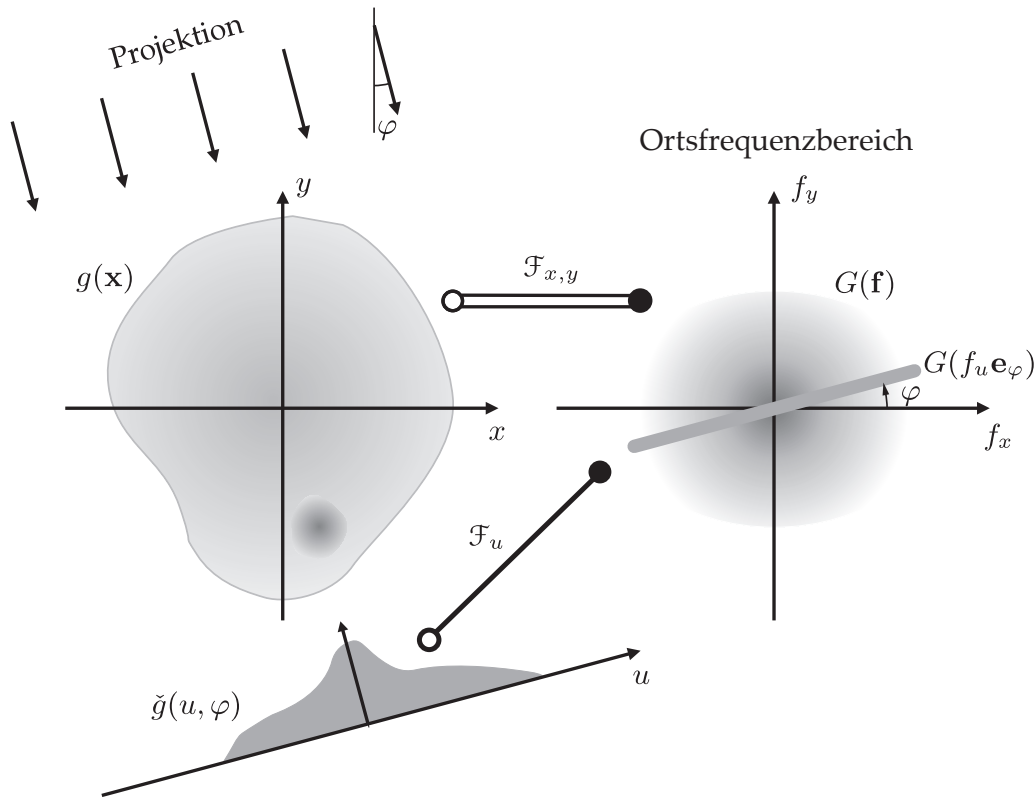
$$G(\mathbf{f}) \cdot \delta(f_y) = G(\mathbf{f}) \cdot \delta(\mathbf{f}^T \mathbf{e}_y)$$

Ausblendung der Spektralwerte auf einer Ursprungsgeraden senkrecht zur Projektionsrichtung

- Drehung um $\varphi \neq 0$: $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_{\varphi\perp} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$
- Drehung von $\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_x)$ um $\varphi \neq 0$ bewirkt ebensolche von $\delta(\mathbf{f}^T \mathbf{e}_y)$

$$\mathcal{F}_u\{\check{g}(u, \varphi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(u, \varphi) e^{-j2\pi f_u u} \, du = G(f_u \mathbf{e}_\varphi)$$

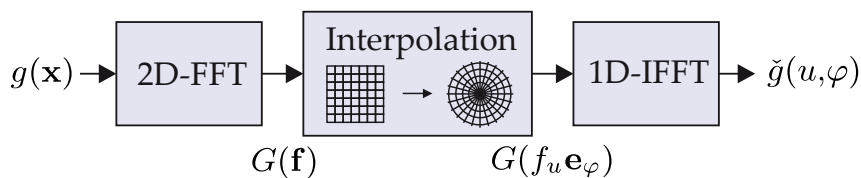
Zentralschnitt-
Theorem



14.3.1 Die Radon-Transformation

Effiziente Berechnung der Radon-Transformation

- 2D-DFT (FFT)
- Übergang zu Polarkoordinaten f_u, φ (Interpolation notwendig)
- Zeilenweise 1D-DFT⁻¹ (FFT⁻¹) bezüglich f_u

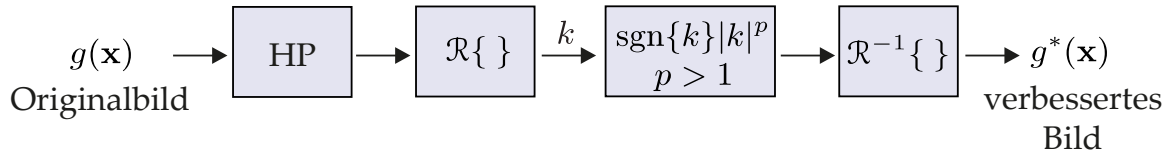


Aufwand

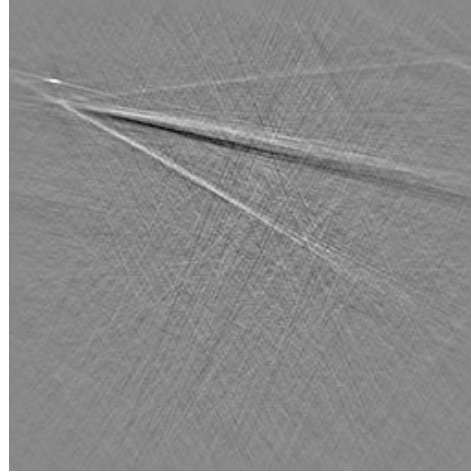
- Radon-Integral direkt: $O(N^3)$
- Via Zentralschnitt-Theorem: $O(N^2 \lg N)$

Bildgröße $N \times N$	256 × 256	512 × 512	1024 × 1024
Aufwand _{Radon} = $O(N^3)$			
Aufwand _{ZST} = $O(N^2 \lg N)$	≈ 10	≈ 18	≈ 32

Beispiel 14.6: Linienverstärkung zur Bildverbesserung



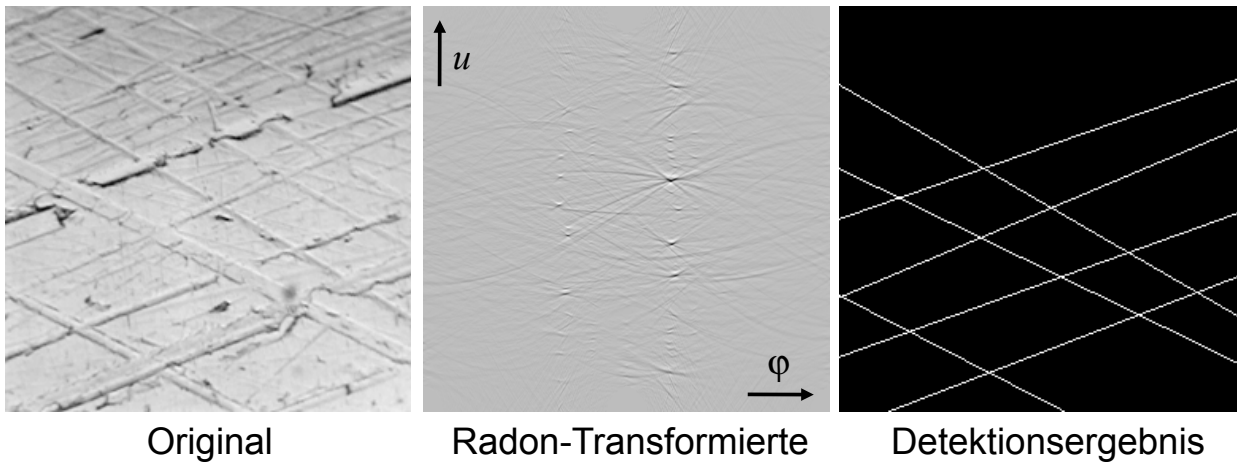
SAR-Bild eines Schiffes mit Bugwelle



Verbessertes Bild

14.3.2 Detektion geradenhafter Strukturen

Beispiel 14.7: Detektion von Riefen in Hontexturen



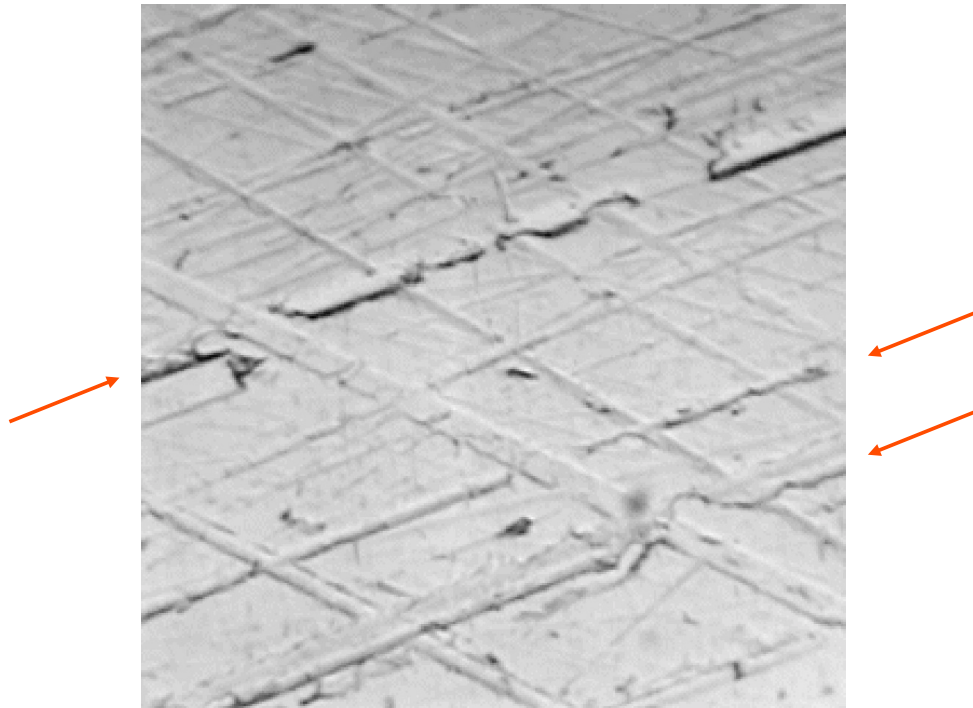
Original

Radon-Transformierte

Detektionsergebnis

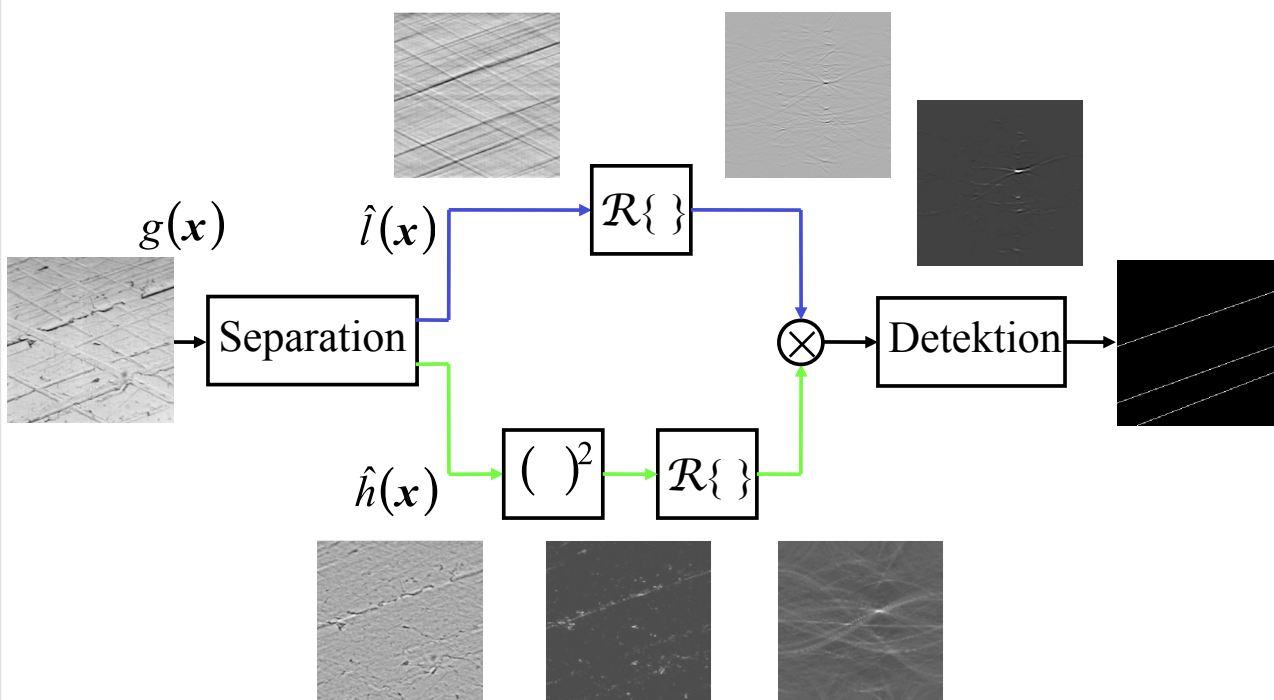
■ **Bemerkung:** Im Gegensatz zu differenzierenden Kanten- und Linien-detektionsoperatoren ist die Radon-Transformation aufgrund ihres integrierenden Charakters rauschunempfindlicher

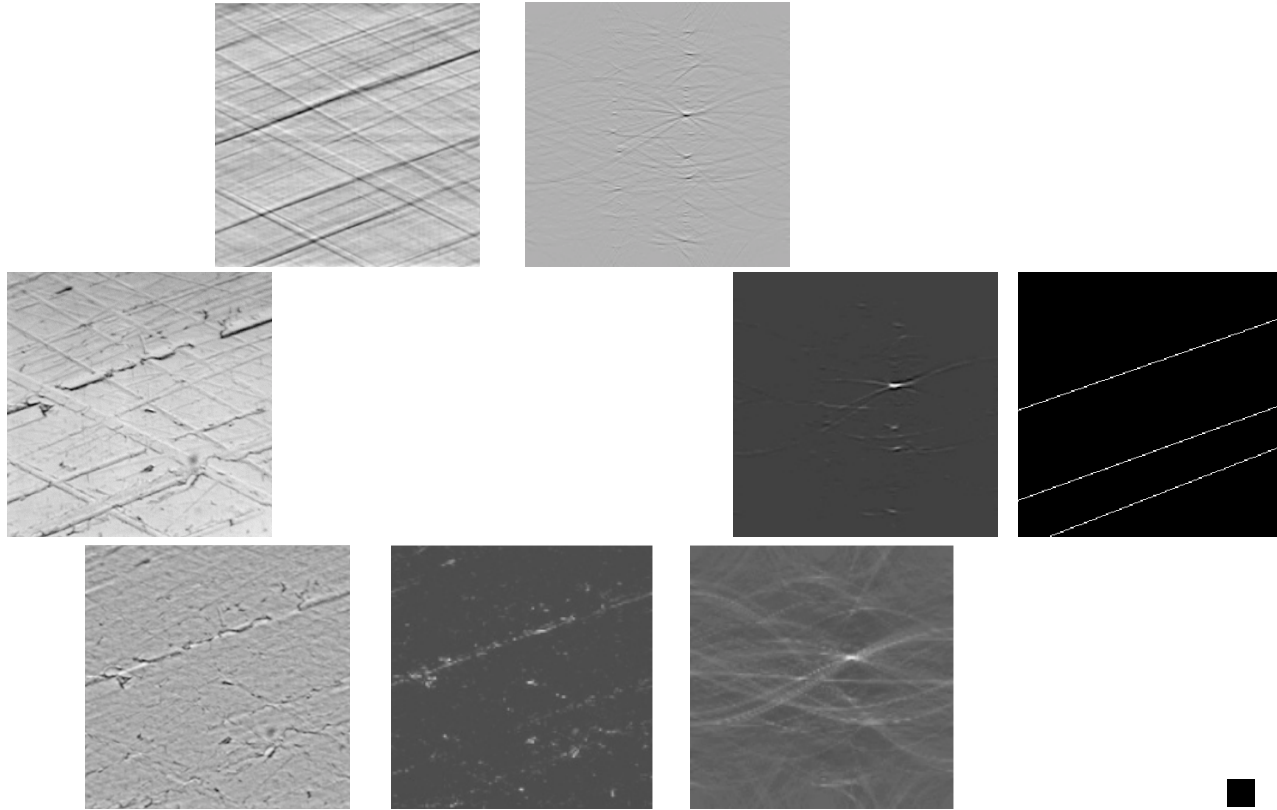
Beispiel 14.8: Detektion von defekten Riefen in Hontexturen



14.3.2 Detektion geradenhafter Strukturen

Detektionsverfahren:





14.3.3 Die Hough-Transformation

- Patentiert durch P.V.C. Hough 1962
- Verbessert: R. O. Duda, P. E. Hart 1972

- **Hough-Transformation**: diskrete Form der Radon-Transformation

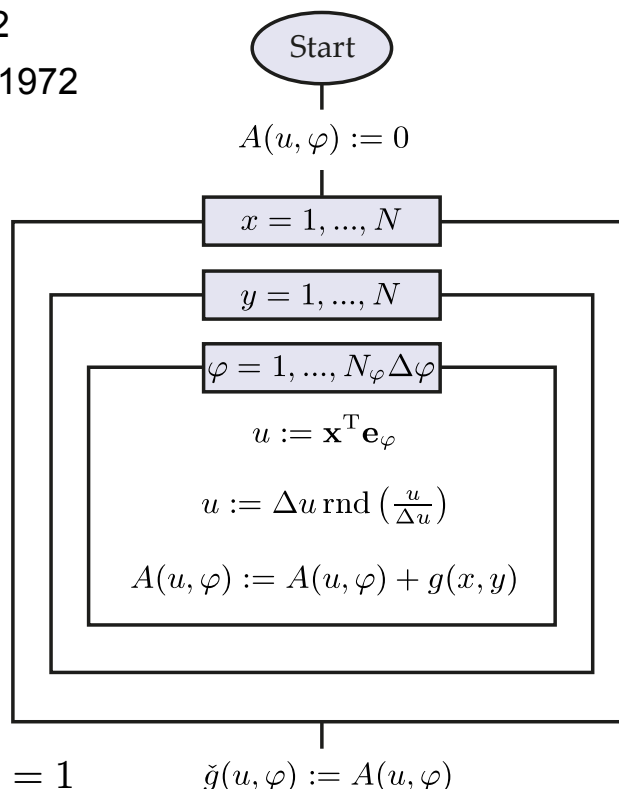
- Geradengleichung:

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi$$

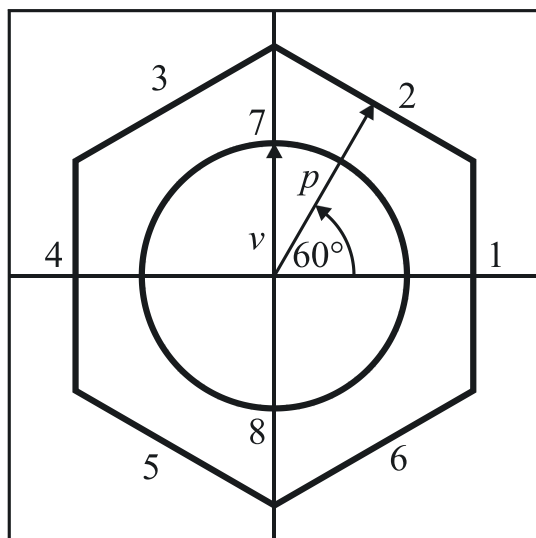
- Hough-Transformierte:

$A(u, \varphi)$: „Akkumulator“

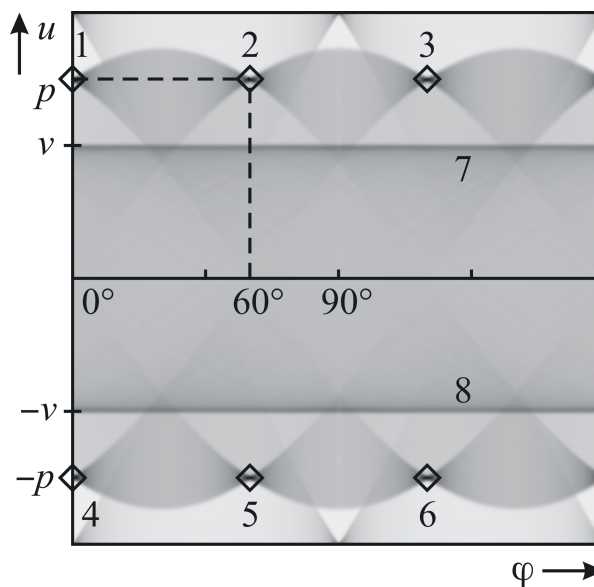
- Bei Binärbildern $g \in \{0, 1\}$:
Summation nur über Orte mit $g(\mathbf{x}) = 1$



Beispiel: Hough-Transformation eines binären Bildes



Binäres Testbild



Hough-Transformierte